

LP 23 - Oscillations

Niveau L1

Prerequis

- * Mécanique du point (PFD, forces usuelles)
- * force frottement fluide
- * Le pendule simple
- * Résolution d'équation différentielles
- * Conservation de l'énergie
- * Notion d'équilibres stables et instables
- * Développement limités
- * Portrait de phase
- * Utilisation de la notation complexe

Biblio

- * Physique tout-en-un PCSI - Salomito

Expérience : Système masse ressort

Pendule simple avec frottements

Introduction Pédagogique

* Cours de L_1 car il aborde des notions essentielles de mécanique, qui sont faisables avec peu d'outils

* Ce cours s'inscrit après un cours de mécanique sur le PFD et sur la conservation de l'énergie

↳ Les élèves sont familiers avec les forces usuelles et les énergies.

* Le choix a été fait de faire ce cours en mécanique et pas en électromagnétisme car il est plus porteur par les élèves, il est plus facile de rattraper à la réalité

* Même si les élèves ont déjà vu le pendule simple on fera un bref retour dessus pour pouvoir s'en servir pour aller plus loin et ajouter des frottements

* Ce cours pourra leur permettre de faire une analogie avec le cours d'électromagnétisme on y retrouvera les mêmes phénomènes.

↳ Certaines notions devront être plus simples à appréhender en électromagnétisme

* Les difficultés ici seront des difficultés calculatoires avec les résolutions des équations différentielles et les différents cas possibles. Une autre difficulté vient du fait de bien faire la différence entre le régime transitoire et le régime périodique

↳ La mécanique étant plus concrète devrait aider les élèves à mieux comprendre les différents cas.

* des TD seront effectuées sur l'établissement et la résolution d'équations diff., ils seront donc communs aux deux cours. (avec le précédent)

↳ Exercice sur les amortisseurs de voiture.

* des TP pourront être fait avec des pendules ou des systèmes masse-ressorts avec ou sans frottements, fluides ou solides. Le but pourra être de voir l'influence du facteur de qualité, cela permettra d'apprendre à utiliser des logiciels d'acquisition.

* Etude de Doc sur l'utilisation des oscillations dans la vie de tous les jours ou dans la communauté scientifique (ex: au lycée)

Introduction

* Aujourd'hui nous allons parler d'oscillations. Alors déjà les oscillations c'est quoi ?

↳ Mouvement périodique autour d'une position d'équilibre.

* On a à faire à des oscillations tout les jours, dans les vieilles horloges, un lustre dans une maison, on va aujourd'hui essayer de comprendre pourquoi on a des oscillations et ce qui peut les influencer.

* On a déjà parlé au dernier cours du pendule simple, mais on va voir que tout n'est pas aussi simple

objectif : Savoir modéliser un système oscillant libre avec et sans frottements.

Savoir faire la différence entre régime transitoire et régime permanent.

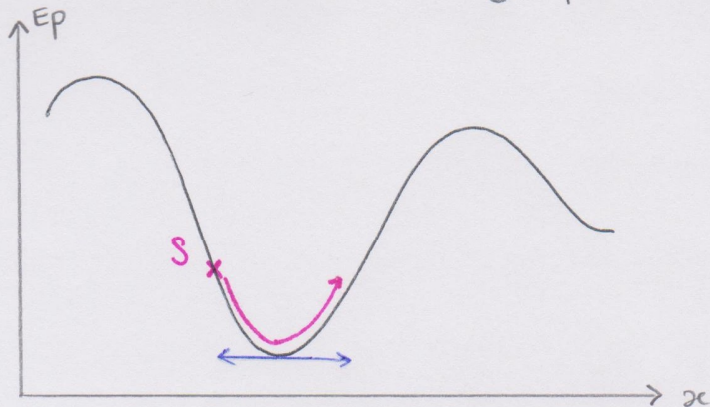
Savoir étudier un système en régime sinusoïdal forcé

I - Oscillations Libres non amorties

A - L'oscillateur harmonique

* Oscillations: mouvement périodique autour d'une position d'équilibre.

↳ autour d'un minimum d'énergie potentielle



On imagine un skieur, si on ne considère pas de frottements $E_m = \text{cte}$, il va descendre puis remonter et ainsi de suite

• Si on se place à proximité du minimum et qu'on fait un développement limité à l'ordre 2 :

= 0 : minimum

$$E_p(x) = E_p(x_e) + \cancel{(x-x_e) \frac{\partial E_p}{\partial x} \Big|_{x_e}} + \frac{(x-x_e)^2}{2} \frac{\partial^2 E_p}{\partial x^2} \Big|_{x_e}$$

$$E_m = E_p + E_c$$

$$= E_p(x_e) + \frac{(x-x_e)^2}{2} \frac{\partial^2 E_p}{\partial x^2} \Big|_{x_e} + \frac{1}{2} m \dot{x}^2$$

Par conservation de l'énergie :

$$\frac{\partial E_m}{\partial t} = 0 = \dot{x} (x-x_e) \frac{\partial^2 E_p}{\partial x^2} \Big|_{x_e} + m \dot{x} \ddot{x}$$

En posant $X = x - x_e$

$$\ddot{X} + X \cdot \frac{1}{m} \frac{\partial^2 E_p}{\partial x^2} \Big|_{x_e} = \boxed{0 = \ddot{X} + \omega_0^2 X}$$

$$\text{avec } \boxed{\omega_0^2 = \frac{1}{m} \frac{\partial^2 E_p}{\partial x^2} \Big|_{x_e}} \quad \text{pulsation propre.}$$

⇒ On retrouve une équation bien connue pour les circuits RL et pour le pendule simple, on va vérifier qu'on retrouve la même chose.

B. Le son émis par une bouteille.

* On a déjà soufflé dans une bouteille et vu qu'elle produisait un son, et que ce son était différent en fonction du volume de la bouteille.

* Quel est le rapport avec un oscillateur harmonique ?

↳ on va modéliser la bouteille par un résonateur de Helmholtz

↳ projeté résonateur + schéma

* En soufflant on provoque un déplacement de la colonne d'air de S on a donc un changement de volume $\Delta V = A \cdot S$ avec $S \ll V$.

↳ Loi de Laplace $P V^\gamma = \text{cte} \Leftrightarrow P_0 V^\gamma = P (V - AS)^\gamma \approx P V^\gamma (1 - \frac{\gamma AS}{V})$

↳ $P = P_0 \cdot \frac{1}{1 - \frac{\gamma AS}{V}} \approx P_0 (1 + \frac{\gamma AS}{V})$

On a donc une force de pression qui vaut $\vec{F} = -A \cdot P_0 (1 + \frac{\gamma AS}{V}) \vec{u}_x + P_0 A \vec{u}_x$

↳ on a la pression au dessus et en dessous de la colonne d'air

PFD: $p \cdot A \cdot L \cdot \frac{\partial^2 S}{\partial t^2} = -\frac{A^2 \gamma P_0 S}{V}$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial t^2} + \frac{P_0 \cdot A \cdot \gamma}{p \cdot V L} S = 0 \Leftrightarrow \ddot{S} + \omega_0^2 S = 0$$

↳ $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{P_0 A \gamma}{p V L}}$

↳ avec la même bouteille (même A et L) la fréquence ne dépend que du volume

Transition : On va regarder si notre modèle de bouteille comme oscillateur harmonique est correct

* On a effectué des mesures pour différents volumes dans une bouteille.

* On a obtenu cette droite d'étalonnage en traçant $f_0 = g(1/\sqrt{V})$

↳ on obtient bien une droite, le modèle semble valide.

* On peut mesurer le volume d'une bouteille

↳ exemple.

Transition : On a vu un exemple d'oscillateur sans dissipation, mais ils ne correspondent que rarement à la réalité, on va donc voir ce qu'on obtient avec des pertes.

B. Le système masse-ressort

* Projection Schema au tableau.

* Pour un ressort $E_p = \frac{1}{2} k (x - x_e)^2$

$$\text{donc } \frac{\partial E_p}{\partial x} = k(x - x_e)$$

$$\frac{\partial^2 E_p}{\partial x^2} = k.$$

Si on réinjecte: $\ddot{x} + \frac{k}{m} x = 0 = \ddot{x} - \omega^2 x.$

↳ On obtient bien la même chose.

* On peut maintenant faire l'étude

• Equation caractéristique: $r^2 - \omega^2 = 0$

$$\Leftrightarrow r^2 = i\omega$$

↳ Solution: $x = A e^{i\omega t} + B e^{-i\omega t} = A' \cos(\omega t) + B' \sin(\omega t)$

↳ on trouve A et B avec les conditions initiales

* le tracé avec $x(t=0) = x_0$ et $\dot{x}(t=0) = 0$ donne:

↳ projection image courbe oscillateur harmonique

↳ On voit bien que la masse oscille autour de sa position d'équilibre

* On peut aussi tracer le portrait de phase

↳ projection portrait de phase

↳ c'est un cercle qui se referme sur lui-même: caractéristique DH.

Transition: On sait bien que tout ne fonctionne pas aussi bien dans la vie, on a des frottements qui amortissent l'oscillateur.

II. Oscillations libres amorties.

A. Le pendule avec frottements fluides

* Dans cette partie on va prendre l'exemple du pendule simple sur lequel on ajoute des frottements fluides

↳ présentation pendule @ diapo

* Intuitivement on comprend que les frottements vont faire que le pendule va s'arrêter. Mais après combien d'oscillations ?

* On peut faire un PFD avec la nouvelle force:

$$m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{g} + \vec{T} - \lambda \vec{v} \quad \leftarrow \text{force frottements fluides}$$

on projette sur $\vec{u}_\theta$

$$m l \ddot{\theta} = -mg \sin \theta - \lambda l \dot{\theta}$$

$$\Leftrightarrow \ddot{\theta} + \frac{\lambda}{m} \dot{\theta} + \frac{g}{l} \theta = 0$$

On classe $Q^\pm$ on écrit : $\boxed{\ddot{\theta} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0}$

avec $\boxed{\omega_0 = \sqrt{g/l}}$ $\boxed{Q = \frac{m}{\lambda} \sqrt{g/l}}$: facteur de qualité

On peut résoudre: $r^2 + \frac{\omega_0}{Q} r + \omega_0^2 = 0$

$$\Delta = \frac{\omega_0^2}{Q^2} - 4\omega_0^2 = 4\omega_0^2 \left(\frac{1}{4Q^2} - 1 \right)$$

- Si $\Delta > 0$, soit $Q < 1/2$: régime aperiodique : pas d'oscillations
 - Si $\Delta < 0$: soit $Q > 1/2$: régime pseudo périodique : oscillations
 - Si $\Delta = 0$: soit $Q = 1/2$: régime critique : limite des oscillations
- ↳ plus Q est grand plus on a d'oscillations (environ Q oscillations)

Transition : Ce qui est important c'est la valeur de Q ici, on va essayer de la déterminer par notre pendule simple.

PROSO

III. Oscillations forcées.

A. Système masse ressort avec bâti mobile

* Dans ce cas, le bâti mobile impose un mouvement à la masse.

↳ projection : le bâti a un mvmt : $A \cos(\omega t)$

La force du ressort n'est plus $-k(x - x_e)$ mais $-k(x - A \cos(\omega t) - x_e)$

↳ L'équation différentielle devient

$$\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{x} + \omega_0^2 x = A \omega_0^2 \cos(\omega t)$$

* Physiquement il va y avoir des phénomènes

- Un régime transitoire qui correspond à la résolution de l'équation homogène

↳ ce sont les 3 régimes vus précédemment

- Un régime permanent : qui correspond à la solution particulière.

↳ pour la trouver on utilise la représentation complexe

$$\underline{x} = \underline{x_0} \cdot e^{j\omega t}$$

$$\Rightarrow -\underline{x_0} \omega^2 + i \frac{\omega_0 \omega}{Q} \underline{x_0} + \omega_0^2 \underline{x_0} = A' \omega_0^2$$

$$\underline{x_0} = \frac{A' \omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + i \frac{\omega_0 \omega}{Q}}$$

$$\underline{x_0} = \frac{A'}{\sqrt{(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2})^2 + (\frac{\omega}{\omega_0 Q})^2}} \Rightarrow \text{Solution : } x = x_0 \cos(\omega t)$$

↳ on a bien des oscillations à la pulsation ω avec une amplitude qui dépend de ω , on étudiera au prochain cours l'effet de ω sur l'amplitude.

Diapo conclusion